

Задания к лабораторным работам по дисциплине Численные методы

Лабораторная работа № 1

Элементы теории погрешностей

Задание:

1. Найти абсолютную и относительную погрешности чисел a и b , все значащие цифры которых верные. Определить абсолютную и относительную погрешности их суммы, разности, произведения и частного, а также количество верных значащих цифр каждого результата.

2. Заданы два приближенных числа x и y , все значащие цифры которых верные. Определить потерю точности при выполнении операции вычитания.

3. При измерении некоторой физической величины получено значение p . Зная, что относительная погрешность этого значения равна $s\%$, найти пределы, в которых заключается измеряемая величина.

4. Со сколькими значащими цифрами необходимо вычислить заданную величину l , чтобы ее относительная погрешность не превышала $m\%$.

5. С какой точностью нужно измерить радиус круга r , чтобы его площадь была вычислена с точностью 0.1% . Со сколькими верными значащими цифрами нужно взять число π ?

6. Найти значение функции $u = \varphi(a_1, a_2)$ и определить абсолютную и относительную погрешности вычисления u при заданных погрешностях $\Delta a_i, i = 1, 2$. Определить погрешности u , если a_1 и a_2 имеют два верных знака после запятой.

7. Найти допустимые абсолютные и относительные погрешности чисел x_1, x_2, x_3 которые позволяют вычислить значение функции f с тремя верными знаками.

Варианты заданий приведены в таблицах 1 – 4.

Таблица 1

Задание	1		2		3	
Вариант	a	b	x	y	p	s%
1	1.31	2.5	2.431	2.432	3.42	0.5
2	0.35	1.431	14.721	14.717	0.071	1
3	7.25	4.3	0.0341	0.0339	0.0083	1.2

4	2.488	0.35	7.4352	7.3451	4.877	0.2
5	3.742	0.444	0.348	0.347	1.334	0.2
6	2.1	0.37	12.731	12.729	4.338	1.1
7	0.75	2.43	3.333	3.332	7.21	1.5
8	2.741	1.38	1.778	1.775	3.241	0.5
9	4.528	2.41	4.735	4.733	8.888	1.4
10	3.31	4.745	10.841	10.844	0.741	2
11	2.7	0.45	0.0041	0.0039	2.339	0.3
12	4.733	0.341	3.393	3.391	12.741	0.1
13	5.72	0.489	5.448	5.446	5.441	0.8
14	5.241	1.343	0.0048	0.0046	7.339	0.9
15	3.341	0.998	9.7391	9.7389	3.448	1.4

Таблица 2

Задание	4		5
Вариант	1	$m \%$	R
1	$\sqrt{41}$	1.2	12.371
2	$\lg 70$	0.5	5.483
3	$\ln 11$	0.01	6.779
4	$\sqrt[3]{112}$	0.05	10.375
5	$\sqrt{105}$	0.1	8.911
6	$\lg 45$	0.2	7.445
7	$\sqrt{22.5}$	0.01	4.574
8	$\log_3 17$	0.05	3.785
9	$\log_4 5$	0.1	5.749
10	$\sqrt[3]{73.4}$	0.05	6.435
11	$\sqrt{44.1}$	0.01	5.549
12	$\ln 9.1$	0.5	2.478
13	$\log_4 7.5$	0.01	3.563
14	$\sqrt[3]{90.3}$	0.05	4.589
15	$\lg 152$	0.1	7.892

Таблица 3

Задание	6				
Вариант	$\varphi(a_1, a_2)$	a_1	a_2	Δa_1	Δa_2
1	$e^{a_1} a_2$	1.371	2.471	0.04	0.08
2	$\sqrt{a_1} + a_1 / \sqrt{a_2}$	4.372	8.009	0.08	0.005
3	$\sin(a_1 + a_2)$	0.745	1.324	0.01	0.008

Задание	6				
Вариант	$\varphi(a_1, a_2)$	a_1	a_2	Δa_1	Δa_2
4	$\sqrt{\cos(a_1 + a_2)}$	0.379	0.091	0.02	0.001
5	$(a_1^2 + \sqrt{a_2})/5$	2.781	0.975	0.04	0.004
6	$\sqrt{a_1^3 + \sqrt{a_2}}$	1.541	2.485	0.03	0.08
7	$2^{a_1} \ln a_2$	0.745	4.583	0.001	0.04
8	$\lg(a_1 + \sqrt{a_2})$	2.735	1.483	0.009	0.001
9	$\sin(a_1 \sqrt{a_2})$	1.441	0.993	0.08	0.002
10	$\lg(a_1/a_2)$	4.038	2.791	0.007	0.01
11	$2^{\sin a_1} \cos a_2$	0.743	0.809	0.005	0.001
12	$\sqrt{a_1} \ln a_2$	0.873	4.325	0.02	0.007
13	$\sqrt{\ln(a_1 + a_2^2)}$	1.545	2.483	0.009	0.01
14	$\sqrt[3]{2^{a_1} \ln a_2}$	0.811	1.441	0.001	0.006
15	$\sqrt{a_1 + \ln a_2}$	1.475	3.081	0.009	0.01

Таблица 4

Задание	7			
Вариант	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3
1	$x_1 \sqrt[3]{x_2} + e^{x_3}$	1.2	4.02	0.75
2	$x_1^2 x_2 - \sqrt{x_3}$	4.3	0.83	1.57
3	$\ln(x_1 + x_2) - \sqrt{x_3}$	0.35	2.81	0.89
4	$\sin x_1 \cos(x_2 x_3)$	0.71	0.17	1.48
5	$\lg(x_1/x_2 + \sqrt{x_3})$	0.76	0.13	1.48
6	$2^{x_1} \sqrt{x_2 + x_3}$	0.41	1.42	0.93
7	$\sin(x_1/x_2 + \sqrt[3]{x_3})$	0.41	0.29	2.09
8	$3^{x_1} \sin(x_2 + x_3)$	0.12	0.81	0.21
9	$\ln(x_1 x_2 x_3)$	1.34	0.97	1.05
10	$\cos(x_1/x_2 + x_3^2)$	0.35	0.17	0.48
11	$(x_1 + \sqrt{x_2})/x_3$	4.35	2.79	1.37
12	$\sin(x_1 x_2)/x_3$	0.45	1.23	0.89
13	$x_1^2 \sqrt{x_2 + x_3}$	1.09	4.05	3.08
14	$\sqrt{x_1 + \sin(x_2 x_3)}$	1.05	0.41	0.18

15	$2^{x_1} \sin(x_2 x_3)$	0.24	0.25	0.91
----	-------------------------	------	------	------

Вопросы для самоконтроля

1. Виды погрешностей.
 2. Понятие о значащих цифрах числа. Примеры.
 3. Погрешность приближенного числа.
 4. Абсолютная и относительная погрешности.
 5. Понятие о предельной абсолютной и относительной погрешностях.
 6. Понятие о количестве верных значащих цифрах. Примеры.
 7. Представление числа в позиционной системе с основанием 10.
- Примеры.
8. Понятие о верных значащих цифрах в узком и широком смыслах.
- Примеры.
9. Прямая задача теории погрешностей.
 10. Обратная задача теории погрешностей.
 11. Принцип равных влияний.
 12. Принцип равных абсолютных погрешностей.
 13. Принцип равных относительных погрешностей.
 14. Правила округления приближенных чисел.

Лабораторная работа № 2

Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Задание:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (2+k)x_1 + 0,25x_2 + 0,75x_3 = 3+k \\ 0,25x_1 + (1,5+k)x_2 + 0,45x_3 = 2,2+k, \\ 0,75x_1 + 0,45x_2 + (3+k)x_3 = 4,2+k \end{cases}$$

где $k = 0,01(n+m)$, n – номер варианта, $m = (11, 12)$ – номер группы.

- 1) Методом Гаусса по схеме единственного деления.
- 2) Методом квадратного корня.
- 3) Вычислить определитель матрицы по алгоритмам методов п.п. 1)–2).

Вопросы для самоконтроля

1. Классификация методов решения СЛАУ.
2. Основные понятия: матрица системы, расширенная матрица системы, элементарные преобразования, определитель.
3. Понятие о симметрической матрице.
4. Понятие о положительно определенной матрице.
5. Понятие о решении системы.
6. Единственность решения СЛАУ.
7. Метод Гаусса с ведущим элементом.
8. Метод Гаусса с выбором главного элемента.
9. Метод квадратного корня решения СЛАУ.
10. Вычисление определителей матриц по изученным методам.

Лабораторная работа № 3

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Задание:

Для заданной системы алгебраических уравнений (условие см. ЛР № 2) следует проверить условия сходимости и найти решение системы уравнений с точностью $\varepsilon=10^{-3}$ указанными методами и для каждого вывести количество итераций:

- 1) простой итерации;
- 2) Зейделя.

Вопросы для самоконтроля

1. Понятие об итерационных методах решения СЛАУ.
2. Метод простой итерации.
3. Условия сходимости метода простой итерации.
4. Метод Зейделя решения СЛАУ.
5. Условия сходимости метода Зейделя.
6. Понятие о векторе начальных приближений.
7. Условия окончания итерационного процесса.
8. Канонический вид метода простых итераций.
9. Понятие о свойстве самоисправляемости сходящегося процесса.
10. Понятие о матрицах с диагональным преобладанием.

Лабораторная работа № 4

Теория интерполирования. Сплайны

Задание:

1. Для функции, заданной таблично, построить интерполяционный многочлен Лагранжа и вычислить значение функции в точке $\bar{x}$.

Вариант	x_i	2.0	2.3	2.5	3.0	$\bar{x}$
1	y_i	5.84	6.13	6.30	6.69	2.02
2	y_i	11.38	12.80	14.70	17.07	2.09
3	y_i	3.14	4.15	5.65	6.91	2.91
4	y_i	6.87	6.41	4.42	3.91	2.85
5	y_i	7.19	6.21	5.12	3.98	2.44
6	y_i	1.50	1.34	1.23	1.16	2.13
7	y_i	1.10	1.05	0.97	0.79	2.25
8	y_i	1.54	1.61	1.66	1.71	2.32
9	y_i	0.78	0.39	0.26	0.19	2.79
10	y_i	0.69	0.35	0.23	0.17	2.94
11	y_i	1.05	1.21	1.57	2.42	2.48
12	y_i	6.28	5.62	5.14	4.91	2.59
13	y_i	1.57	1.21	1.11	1.05	2.64
14	y_i	1.11	0.74	0.56	0.44	2.71
15	y_i	1.88	1.54	1.89	2.30	2.12
16	y_i	5.11	4.56	4.02	3.75	2.98
17	y_i	10.01	11.62	12.55	13.14	2.11
18	y_i	1.69	1.52	2.62	3.14	2.65
19	y_i	0.26	0.98	1.56	1.84	2.07
20	y_i	4.12	3.98	3.41	2.52	2.78
21	y_i	9.63	10.01	10.79	11.24	2.23
22	y_i	7.89	7.11	6.91	6.02	2.56
23	y_i	3.89	3.01	2.78	2.11	2.95
24	y_i	1.22	2.22	3.22	2.22	2.35
25	y_i	4.01	5.18	6.85	7.75	2.18
26	y_i	0.25	0.99	1.12	2.45	2.61
27	y_i	11.98	11.21	10.73	10.01	2.42
28	y_i	9.11	8.35	7.63	7.03	2.89

Вариант	x_i	2.0	2.3	2.5	3.0	$\bar{x}$
29	y_i	2.56	3.45	4.78	5.02	2.21
30	y_i	6.53	5.95	5.07	4.68	2.73
31	y_i	0.11	0.23	0.44	0.65	2.11
32	y_i	13.2	14.7	18.9	23.6	2.37

2. Для табличной функции из задания № 1 построить интерполяционный многочлен Ньютона и вычислить значение функции в заданной точке $\bar{x}$. Сравнить полученные результаты с результатами №1.

3. Для заданной функции $f(x)$ построить таблицу значений функции на отрезке $[a, b]$, разбив отрезок на n равных частей, а затем с помощью интерполирования в форме Ньютона найти значение функции в заданной точке $\bar{x}$. Определить погрешность интерполирования.

Вариант	$f(x)$	a	b	n	$\bar{x}$
1	$\ln x$	1.0	1.6	3	1.55
2	2^x	-0.2	0.4	3	-0.11
3	$x/(x^2 + 1)$	0.6	1.2	3	0.65
4	$x/(x + 2)$	0.0	0.6	3	0.54
5	$\sin x$	0.1	0.4	3	0.13
6	$\cos x$	-0.1	0.2	3	0.18
7	$\sin x + \cos x$	0.0	0.3	3	0.27
8	$\sqrt{x}$	1.2	1.8	3	1.24
9	$\sqrt[3]{x}$	0.4	1.0	3	0.45
10	$\sqrt[3]{x^2}$	0.5	0.8	3	0.77
11	$\sqrt{x}$	1.1	1.4	3	1.12
12	$3^{\sqrt{x}}$	0.1	0.4	3	0.37
13	$2^x \cos x$	0.0	0.3	3	0.12
14	$2^x \sin x$	-0.1	0.2	3	-0.05
15	$x2^x$	0.4	0.7	3	0.63
16	$\sqrt{x-2}$	2.2	2.5	3	2.31
17	$\sqrt{x+2}$	-0.9	-0.6	3	-0.65
18	$3^{x+0.1}$	-1	-0.7	3	-0.93
19	$\sin x - \cos x$	-0.7	-0.4	3	-0.51
20	$2\sin(x-1)$	0.3	0.6	3	0.37
21	$0.9\cos(1+x)$	0.1	0.4	3	0.36
22	$0.9\sqrt{x+1}$	-0.8	-0.5	3	-0.71
23	$x/(1.23 + \sqrt{x+1})$	0.5	0.8	3	0.75

24	$\sqrt[3]{x+0.1}$	-0.4	0	3	-0.1
25	$\sqrt[5]{x-0.1}$	0.2	0.6	3	0.18
26	$\ln(1/x)$	0.6	0.9	3	0.81
27	$x \cdot 3^{x+1}$	-0.7	-0.4	3	-0.46
28	2^{x^2}	0.1	0.4	3	0.35
29	$x \cdot \cos 2^x$	-0.3	0	3	-0.25
30	$x \cdot \sqrt{\frac{1}{2-x}}$	0.1	0.4	3	0.31
31	$2x^2 - \sqrt{x+0.5}$	0.6	0.9	3	0.67
32	$\frac{\sin(x-1)}{\cos(x+2)}$	-1.2	-0.9	3	-0.83

4. Для функции, заданной таблицей, найти приближенное значение первой и второй производной в точке $\bar{x}$

X	0.98	1.00	1.02	1.04
Y	0.7825	0.7739	0.7651	0.7473

$\bar{x} = 0.98 + 0.001k$, k – номер варианта.

5. По заданной таблице значений функции определить значения аргументов x , соответствующих заданным значениям y

X	4	6	9	11	15	17	19
Y	16	36	81	121	225	289	361

1) $y=25$; 2) $y=49$; 3) $y=100$; 4) $y=64$; 5) $y=144$; 6) $y=196$; 7) $y=169$; 8) $y=55$; 9) $y=105$; 10) $y=18$; 11) $y=300$; 12) $y=180$; 13) $y=150$; 14) $y=130$; 15) $y=200$; 16) $y=19$; 17) $y=170$; 18) $y=40$; 19) $y=230$; 20) $y=260$; 21) $y=324$; 22) $y=64$; 23) $y=256$; 24) $y=330$; 25) $y=42$; 26) $y=96$; 27) $y=55$; 28) $y=272$; 29) $y=258$; 30) $y=175$; 31) $y=26$; 32) $y=123$.

6. Для функции, из задания № 3, построить кубический сплайн и вычислить значение функции в указанной точке $\bar{x}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Понятие об интерполировании.
2. Понятие об узлах интерполирования.
3. Суть задачи о построении интерполирующего многочлена.
4. Теорема о существовании интерполяционного многочлена.
5. Построение интерполяционного многочлена Лагранжа.
6. Погрешность метода интерполяции с помощью формулы Лагранжа.
7. Понятие о конечных разностях, их свойства.
8. Понятие о разделенных разностях (разностных отношениях).

9. Связь разделенных разностей и производной.
10. Понятие об обратном интерполировании.
11. Понятие о конечной разности первого порядка.
12. Понятие о конечной разности второго порядка.
13. Понятие о конечной разности n -го порядка.
14. Первая интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов.
15. Вторая интерполяционная формула Ньютона для равноотстоящих узлов.
16. Первая интерполяционная формула Ньютона для неравноотстоящих узлов.
17. Вторая интерполяционная формула Ньютона для неравноотстоящих узлов.
18. Оценка погрешности метода интерполирования с помощью формул Ньютона.
19. Понятие об «интерполировании вперед», «интерполировании назад».
20. Дифференцирование для равноотстоящих узлов.
21. Дифференцирование для неравноотстоящих узлов.
22. Понятие об обратной задаче интерполирования.

Лабораторная работа № 5

Метод наименьших квадратов

Задание:

1. Для заданной функции $y = f(x)$ построить полином второй степени, приближающий $f(x)$ с наименьшим квадратичным отклонением на отрезке $[a, b]$:

Вариант	$f(x)$	a	b
1	e^x	0	1
2	$1/(x+1)$	1	2
3	$1/(1+x^2)$	0	1
4	$\sin x$	0	π
5	$x/(1+x)$	1	2
6	$\ln x$	1	2
7	$\cos x$	0	π
8	$x^3 - 2x^2$	0	2
9	$x/(1+x^2)$	0	1
10	$x^2 - 4x$	-1	1
11	2^x	0	1
12	$3x^3 + x$	1	2
13	$2/(x+3)$	0	1
14	$x^2/(1+x^2)$	0	1
15	$2x + 5x^2$	-1	2
16	$x^2 + \frac{1}{4}x$	1	3
17	$1 + 0.5x$	-2	0
18	$0.5\cos x$	$-\pi$	0
19	$6x^2 - 1.1x$	0	2
20	$\cos(x+1)$	0	π
21	$1 + 3x^2$	-3	-1
22	$\ln(x+1)$	3	5
23	$\frac{1}{6}x^3$	0	2

Вариант	$f(x)$	a	b
24	$\frac{x^2}{8}$	-1	1
25	3^x	2	4
26	$0.5 \cdot 2^x$	1	3
27	$x^2 + \cos x$	0	2
28	$0.2x^2 - x$	1	3
29	$\sin(x-1)$	0	π
30	$x + e^x$	0	2
31	$x^3 - 2$	2	0
32	$0.5\sin(x+1)$	0	2

2. Для функции $f(x)$, заданной таблично, с помощью метода наименьших квадратов построить аппроксимирующий многочлен второй степени:

Вариант	x_i	1	2	3	4
1	y_i	-1	0	2	4
2	y_i	1	9	10	12
3	y_i	-4	0	2	7
4	y_i	4	1	0	2
5	y_i	1	3	3	1
6	y_i	-1	-2	0	5
7	y_i	1	1	0	-1
8	y_i	-3	3	-3	3
9	y_i	0	3	8	10
10	y_i	-2	0	2	9
11	y_i	5	-1	1	2
12	y_i	1	3	-2	-3
13	y_i	-3	0	1	4
14	y_i	2	3	4	-1
15	y_i	-2	-1	0	2
16	y_i	3	4	2	1
17	y_i	-1	0	1	4
18	y_i	6	4	3	0
19	y_i	0	-2	-5	-11
20	y_i	5	3	0	-2

21	y_i	10	7	6	1
22	y_i	-4	-1	0	4
23	y_i	0	7	9	11
24	y_i	2	2	1	-2
25	y_i	-5	0	5	-5
26	y_i	2	5	0	-7
27	y_i	-3	-1	0	1
28	y_i	5	3	-2	0
29	y_i	6	4	1	2
30	y_i	-2	2	6	8
31	y_i	4	3	8	13
32	y_i	-8	-2	3	10

3. Для функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$, с помощью метода наименьших квадратов построить обобщенный аппроксимирующий многочлен, взяв в качестве ортогональной системы систему тригонометрических функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x$:

Вариант	$f(x)$	Вариант	$f(x)$
1	$y = x$	17	$y = 1 + 0.1 \sin 2x$
2	$y = 1 + 0.2 \sin x$	18	$y = 1 + x^2$
3	$y = \cos 2x + \frac{1}{2} \sin x + 1$	19	$y = \cos 2x - \sin 2x + 1$
4	$y = e^{-x}$	20	$y = -0.3 \cos 2x + 1$
5	$y = 1 - x$	21	$y = e^x$
6	$y = 1 - \frac{1}{4} \cos 2x$	22	$y = x - \sin x$
7	$y = x + 1$	23	$y = 1 + \cos 2x$
8	$y = \cos 2x - 1$	24	$y = x^2$
9	$y = 1 + 2 \cos 2x$	25	$y = \sin x + \cos 2x$
10	$y = 3x + 1$	26	$y = 1 - \sin x - 2.1 \sin 2x$
11	$y = \sin x + \cos x$	27	$y = -\sin 2x + 1$
12	$y = 1 + 3.2x^2$	28	$y = 0.1 \sin 2x - 1 + \cos x$
13	$y = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$	29	$y = 1 + \sin 2x + x$
14	$y = 1 + \cos x$	30	$y = 1 + \sin 2x$
15	$y = \cos x - \frac{1}{2}$	31	$y = 0.5 \cos x + \sin 2x + 1$
16	$y = \sin x - 3 \cos 2x$	32	$y = 1 - \cos x + 0.5 \sin 2x$

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется скалярное произведение двух функций? Норма элемента. Ортогональность.
2. Что называется среднеквадратичным отклонением?
3. Теорема об элементе наилучшего среднеквадратичного приближения.
4. Построение многочлена наилучшего приближения для функции на отрезке.
5. Примеры ортогональных систем многочленов.

Лабораторная работа № 6

Численные методы решения нелинейных уравнений

Задание:

Отделить корни нелинейного уравнения аналитически/графически и уточнить один из них (для всех методов рассматривать одинаковый отрезок) методом итераций, Ньютона, хорд, комбинированным с точностью вычисления до 0.001. В работе должно присутствовать аналитическое или графическое отделение корней.

Вариант	Уравнение	Вариант	Уравнение
1	$x^3 + 2x^2 + 2 = 0$	2	$x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$
3	$x^3 - 2x + 2 = 0$	4	$x^3 + 3x - 1 = 0$
5	$x^3 + x - 3 = 0$	6	$x^3 + 0.4x^2 + 0.6x - 1.6 = 0$
7	$x^3 - 0.2x^2 + 0.4x - 1.4 = 0$	8	$x^3 - 0.1x^2 + 0.4x + 2 = 0$
9	$x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$	10	$x^3 - 0.2x^2 + 0.5x - 1 = 0$
11	$x^3 - 0.1x^2 + 0.4x + 1.2 = 0$	12	$x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$
13	$x^3 - 0.2x^2 + 0.5x - 1.4 = 0$	14	$x^3 + 2x^2 + 4 = 0$
15	$x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$	16	$x^3 + 0.2x^2 + 0.5x + 0.8 = 0$
17	$x^3 + 4x - 6 = 0$	18	$x^3 + 0.1x^2 + 0.4x - 1.2 = 0$
19	$x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$	20	$x^3 - 0.1x^2 + 0.4x - 1.5 = 0$
21	$x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$	22	$x^3 - 0.2x^2 + 0.3x - 1.2 = 0$
23	$x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$	24	$x^3 + 0.2x^2 + 0.5x - 2 = 0$
25	$x^3 + 3x + 1 = 0$	26	$x^3 + 0.2x^2 + 0.5x - 1.2 = 0$
27	$x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$	28	$x^3 - 0.1x^2 + 0.4x - 1.5 = 0$
29	$x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$	30	$x^3 - 0.1x^2 + 0.3x - 0.6 = 0$
31	$0.5x^3 + 5x^2 - 7 = 0$	32	$2x^3 - 0.1x^2 + x - 1 = 0$

Вопросы для самоконтроля

1. Понятие о нелинейном уравнении.
2. Виды нелинейных уравнений.
3. Понятие о решении уравнения.
4. Этап отделения корней при использовании численных методов решения уравнения.
5. Способы отделения корней. Сущность этих методов.
6. Метод простой итерации для решения нелинейного уравнения. Графическая интерпретация метода.

7. Достаточные условия сходимости итерационного процесса при решении уравнения $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, содержащего корень, методом простой итерации.

8. Условие критерия достижения заданной точности при решении уравнения $x = f(x)$ методом итерации.

9. Построение итерационной последовательности точек при решении уравнения методом простой итерации.

10. Метод Ньютона для решения нелинейного уравнения. Графическая интерпретация метода.

11. Условия сходимости метода Ньютона.

12. Метод хорд для решения нелинейного уравнения. Графическая интерпретация метода.

13. Условия сходимости метода хорд.

14. Комбинированный метод для решения нелинейного уравнения. Графическая интерпретация метода.

15. Условия сходимости комбинированного метода.

Лабораторная работа № 7

Численные методы решения нелинейных систем

Задание:

Решить системы двух нелинейных уравнений с точностью до 0.001 методами:

- 1) методом итераций;
- 2) методом Ньютона.

Построить график, визуализирующий начальное приближение решения системы. Использовать среды построения СКМ, MS Excel.

Вариант	Система	Вариант	Система
1	$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1.2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$	2	$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0.5 \\ x - \cos y = 3 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \sin x + 2y = 2 \\ \cos(y-1) + x = 0.7 \end{cases}$	4	$\begin{cases} \cos x + y = 1.5 \\ 2x - \sin(y-0.5) = 1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} \sin(x+0.5) - y = 1 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$	6	$\begin{cases} \cos(x+0.5) + y = 0.8 \\ \sin y - 2x = 1.6 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \sin(x-1) = 1.3 - y \\ x - \sin(y+1) = 0.8 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0 \\ \sin y + x = -0.4 \end{cases}$
9	$\begin{cases} \cos(x+0.5) - y = 2 \\ \sin y - 2x = 1 \end{cases}$	10	$\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1.5 \\ \cos(y-2) + x = 0.5 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1.2 \\ 2y + \cos x = 2 \end{cases}$	12	$\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0.5 \\ y - \cos x = 3 \end{cases}$
13	$\begin{cases} \sin x + 2y = 2 \\ \cos(x-1) + y = 0.7 \end{cases}$	14	$\begin{cases} \cos y + x = 1.5 \\ 2y - \sin(x-0.5) = 1 \end{cases}$
15	$\begin{cases} \sin(y+0.5) - x = 1 \\ \cos(x-2) + y = 0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} \cos(y+0.5) + x = 0.8 \\ \sin x - 2y = 1.6 \end{cases}$
17	$\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1.3 \\ y - \sin(x+1) = 0.8 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0 \\ \sin x + y = -0.4 \end{cases}$

Вариант	Система	Вариант	Система
19	$\begin{cases} \cos(y + 0.5) - x = 2 \\ \sin x - 2y = 1 \end{cases}$	20	$\begin{cases} \sin(y + 2) - x = 1.5 \\ \cos(x - 2) + y = 0.5 \end{cases}$
21	$\begin{cases} \sin(x + 1) - y = 1 \\ \cos y + 2x = 2 \end{cases}$	22	$\begin{cases} \cos(x - 1) + y = 0.8 \\ x - \cos y = 2 \end{cases}$
23	$\begin{cases} \sin x + 2y = 1.6 \\ \cos(y - 1) + x = 1 \end{cases}$	24	$\begin{cases} \cos(x + 0.5) + y = 1 \\ \sin y - 2x = 2 \end{cases}$
25	$\begin{cases} \cos x + y = 1.2 \\ 2x - \sin(y - 0.5) = 2 \end{cases}$	26	$\begin{cases} \sin(x + 0.5) - y = 1.2 \\ \cos(y - 2) + x = 0 \end{cases}$
27	$\begin{cases} \sin(x - 1) + y = 1.5 \\ x - \sin(y + 1) = 1 \end{cases}$	28	$\begin{cases} \sin(y + 1) - x = 1 \\ 2y + \cos x = 2 \end{cases}$
29	$\begin{cases} \cos(y - 1) + x = 0.8 \\ y - \cos x = 2 \end{cases}$	30	$\begin{cases} \cos(x - 1) + y = 1 \\ \sin y + 2x = 1.6 \end{cases}$
31	$\begin{cases} 0.1x - \cos(y + 1) = -1 \\ \sin x + 0.5y = 2.1 \end{cases}$	32	$\begin{cases} 0.2\sin(x - 1) - y = 0.5 \\ 2x - \sin(y + 1) = 4 \end{cases}$

Вопросы для самоконтроля

1. Понятие о системе нелинейных уравнений.
2. Понятие о решении системы нелинейных уравнений.
3. Этап отделения корней при использовании численных методов решения систем нелинейных уравнений.
4. Способы отделения корней нелинейных систем уравнений. Сущность этих методов.
5. Метод простой итерации для системы из двух нелинейных уравнений.
6. Метод Ньютона для системы из двух нелинейных уравнений.
7. Распространение метода простой итерации на системы n уравнений с n неизвестными.
8. Распространение метода Ньютона на системы n уравнений с n неизвестными.

Лабораторная работа № 8

Приближенное вычисление интегралов

Задание:

1. Вычислить интегралы по обобщенной формуле трапеций, разбив отрезок интегрирования на n частей. Оценить погрешность.

Вариант	Подынтегральная функция	a	b	n
1	$1/x$	1	2	8
2	$1/(1+x^2)$	0	1	8
3	$\sqrt{6x-5}$	1	2	8
4	$\sin x^2$	0	1	8
5	$\ln(1+x^2)$	0	1	8
6	e^{-x^2}	0	1	8
7	$\sin x$	0	$\pi/2$	8
8	$\sqrt{2x^2+3}$	2	3	8
9	$\cos x^2$	0	$\pi/2$	8
10	$\sqrt[3]{x}$	5	6	8
11	$x\sqrt[3]{1+x^2}$	1	2	8
12	xe^{-x}	1	2	8
13	$x^2 \cos x$	$\pi/2$	π	8
14	$\sqrt{1+e^x}$	0	1	8
15	$(x+1)/\sqrt{x}$	2	3	8
16	$1/(1+x^3)$	0	1	8
17	$\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$	1	2	8
18	$\sqrt{1+\sin^2 x}$	0	$\pi/2$	8
19	$x \ln(1+x)$	0	1	8
20	$1/(1+x)$	1	2	8
21	$\sqrt{x} \sin x$	1	2	8
22	$\sqrt{x} e^{x^2}$	2	3	8
23	$\sqrt{3+\cos x}$	0	$\pi/2$	8
24	$\sqrt{e^x-1}$	0	$\ln 2$	8
25	$\ln x$	4	5	8
26	$\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}$	0	$\pi/2$	8

Вариант	Подынтегральная функция	a	b	n
27	$\frac{\sin x}{x}$	1	2	8
28	$x/(1+x)$	2	3	8
29	$\sqrt{1+\cos^2 x}$	0	$\pi/2$	8
30	$\frac{\sin(x+1)}{2}$	1	2	8
31	$\frac{2x^2}{\sqrt{x+2}}$	0	1	8
32	$\frac{1}{3+x}$	-1	0	8

2. Вычислить интеграл по обобщенной формуле Симпсона при заданном числе разбиений отрезка интегрирования, $m=4, n=2m=8$. Подынтегральную функцию взять из № 1. **Оценить погрешность.**

3. Вычислить интеграл по формуле Гаусса для $n=3$. Подынтегральную функцию взять из № 1.

4. Вычислить приближенно двойной интеграл

$$\int_a^b \int_a^b F(x, y) dx dy,$$

где $F(x, y) = f(x)f(y)$, а функция $f(x)$ и пределы интегрирования a и b взять из № 1. Использовать:

а) кубатурную формулу Симпсона с шагами $h_x = h_y = \frac{b-a}{2}$;

б) метод Гаусса для $n=2$.

Вопросы для самоконтроля

1. Определенный интеграл, его геометрическая интерпретация.
2. Квадратурная формула трапеций, остаточный член. Геометрическая интерпретация.
3. Квадратурная формула Симпсона, остаточный член. Геометрическая интерпретация.
4. Обобщенные квадратурные формулы трапеций и Симпсона, их остаточные члены.
5. Квадратурная формула Гаусса, остаточный член.
6. Методы вычисления двойных интегралов – кубатурная формула Симпсона.
7. Методы вычисления двойных интегралов – метод Гаусса.

Лабораторная работа № 9

Одношаговые методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Задание:

Составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[a, b]$; шаг $h = 0.1$, используя методы:

- 1) Эйлера;
- 2) Эйлера с итерационным уточнением;
- 3) Рунге-Кутты.

Все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками.

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{5}}$ $y_0(1.8) = 2.6, x \in [1.8; 2.8]$	17	$y' = x + \cos \frac{y}{e}$ $y_0(1.4) = 2.5, x \in [1.4; 2.4]$
2	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{5}}$ $y_0(1.8) = 2.6, x \in [1.8; 2.8]$	18	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{11}}$ $y_0(2.1) = 2.5, x \in [2.1; 3.1]$
3	$y' = x + \cos \frac{y}{3}$ $y_0(1.6) = 4.6, x \in [1.6; 2.6]$	19	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{1.3}}$ $y_0(0.1) = 0.8, x \in [0.1; 1.1]$
4	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{2}}$ $y_0(0.8) = 1.3, x \in [0.8; 1.8]$	20	$y' = 2y - 3x^2 - 2$ $y_0(0) = 2.1, x \in [0; 1]$
5	$y' = x^2 + y^2$ $y_0(0) = 0.4, x \in [0; 1]$	21	$y' = x + y\sqrt{x}$ $y_0(0) = 0.2, x \in [0; 1]$
6	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{7}}$ $y_0(0.5) = 0.6, x \in [0.5; 1.5]$	22	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{3}}$ $y_0(1.2) = 2.1, x \in [1.2; 2.2]$
7	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{10}}$ $y_0(0.6) = 0.8, x \in [0.6; 1.6]$	23	$y' = e^{-x} - y$ $y_0(0) = 1.1, x \in [0; 1]$

8	$y' = x + \sin \frac{y}{e}$ $y_0(1.4) = 2.5, x \in [1.4; 2.4]$	24	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{2.8}}$ $y_0(1.4) = 2.2, x \in [1.4; 2.4]$
9	$y' = y \sin x + x$ $y_0(0) = 0.2, x \in [0; 1]$	25	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{2}}$ $y_0(0.8) = 1.4, x \in [0.8; 1.8]$
10	$y' = \cos(x + y)$ $y_0(0) = 0.6, x \in [0; 1]$	26	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{7}}$ $y_0(0.5) = 0.6, x \in [0.5; 1.5]$
11	$y' = \sqrt{x} + y$ $y_0(0) = 1.3, x \in [0; 1]$	27	$y' = y \cos x + x$ $y_0(0) = 0.3, x \in [0; 1]$
12	$y' = x + \sin \frac{y}{\pi}$ $y_0(1.7) = 5.3, x \in [1.7; 2.7]$	28	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{0.3}}$ $y_0(0.5) = 0.6, x \in [0.5; 1.5]$
13	$y' = x + \cos \frac{y}{3}$ $y_0(1.6) = 4.6, x \in [1.6; 2.6]$	29	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{3}}$ $y_0(1.1) = 1.5, x \in [1.1; 2.1]$
14	$y' = x + \cos \frac{y}{2.25}$ $y_0(1.4) = 2.2, x \in [1.4; 2.4]$	30	$y' = x + \sin \frac{y}{1.25}$ $y_0(0.5) = 1.8, x \in [0.5; 1.5]$
15	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{15}}$ $y_0(0.2) = 1.1, x \in [0.2; 1.2]$	31	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{10}}$ $y_0(0.6) = 0.8, x \in [0.6; 1.6]$
16	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{11}}$ $y_0(0.6) = 1.2, x \in [0.6; 1.6]$	32	$y' = x + \cos \frac{y}{\pi}$ $y_0(1.7) = 5.3, x \in [1.7; 2.7]$

Вопросы для самоконтроля

1. Постановка задачи Коши для ОДУ первого порядка.
2. Теорема Коши.
3. Формулировка Задачи Коши для ОДУ n -го порядка.
4. Классификация методов решения задачи Коши для ОДУ.
5. Понятие о приближенных и численных методах.
6. Одношаговые явные и неявные численные методы.
7. Численный метод Эйлера. Вывод явного метода Эйлера.
8. Оценка погрешности аппроксимации метода Эйлера.

9. Решение задачи Коши для ОДУ первого порядка. Модификации метода Эйлера.

10. Решение задачи Коши для ОДУ первого порядка. Итерационный метод Эйлера.

11. Общий способ построения одношаговых вычислительных правил, предложенный Рунге и Куттой.

12. Решение задачи Коши для ОДУ первого порядка методом Рунге-Кутты.

ФМИТП кафедра ВМИП

Лабораторная работа № 10

Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Метод Рунге-Кутты

Задание:

Используя метод Рунге-Кутты численно решить систему дифференциальных уравнений первого порядка с данными начальными условиями на отрезке $[a, b]$ с шагом $h=0.1$ при указанных значениях параметров

$$\begin{cases} y' = -yz + \frac{\sin x}{x}, \\ z' = -z^2 + \frac{\alpha x}{1+x^2}, \end{cases}$$

$$y(0,5) = 0, \quad z(0,5) = -0,5, \quad a = 0,5, \quad b = 1,5, \quad \alpha = 2,0 + \frac{\beta}{40}, \quad \beta = 20 + k,$$

где k – номер варианта.

Вопросы для самоконтроля

1. Постановка задачи Коши для систем ОДУ первого порядка.
2. Переход от решения задачи Коши для ОДУ первого порядка к решению задачи Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка.
3. Решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений первого порядка методом Рунге-Кутты.